ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I3 1982

Б.А.Андреев

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ 2-СКОРОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Определены 2 специальных типа элементов p-го касательного расслоения многообразия M, являющегося G-пространством. Введенные понятия изучаются для $p=2$ в случаях, когда M является: точечным проективным пространством P_N, пространством $R(p,\pi)$ неинцидентных нуль-пар проективного пространства и в некоторых других случаях. Полученные результаты применяются к исследованию дифференцируемого отображения $\varphi: P_N \longrightarrow R(p,\pi)$. Все рассмотрения имеют локальный характер.

I. Пусть M -пространство представления группы Ли G, а C_m -множество кривых $\ell: R \longrightarrow M$, таких, что $\ell(0) = m \in M$ и $\operatorname{rang} \ell$ в $0 \in R$ равен 1. Обозначим символом $(\ell)_p$ струю $j^p_0 \in T^p_m(M)$ порядка p в точке 0 отображения ℓ, т.е. p-скорость на M [1, §5], а символом $\{\ell\}_p$ -множество кривых $\bar{\ell} \in C_m$, представимых в виде $\bar{\ell} = \bar{\bar{\ell}} \circ \varepsilon$, где $\bar{\bar{\ell}} \in (\ell)_p$, ε -элемент дифференциальной группы $\mathcal{D}^p_1$ порядка p [1, с.44]. Пусть, далее

$$S(\ell)_p = \{g \in G \mid g \circ \ell \in (\ell)_p\}, \quad S\{\ell\}_p = \{g \in G \mid g \circ \ell \in \{\ell\}_p\}.$$

Легко показать, что $S(\ell)_p$ и $S\{\ell\}_p$ являются подгруппами группы G, причем выполняется:

$$S(\ell)_p \subset S(\ell)_{p-1}, \; S\{\ell\}_p \subset S\{\ell\}_{p-1}, \; S(\ell)_p \subset S\{\ell\}_p.$$

О п р е д е л е н и е 1. p-скорость $(\ell)_p$ называется p-фиксатором (p-квазификсатором), если выполняется: $S\{\ell\}_{p-1} \subset S\{\ell\}_p$, ($S(\ell)_{p-1} \subset S\{\ell\}_p$).

П р е д л о ж е н и е 1. Каждый p-фиксатор является p-квазификсатором.

Доказательство следует из соотношения $S(\ell)_{p-1} \subset S\{\ell\}_{p-1}$.

Рассмотрим 2-квазификсаторы и 2-фиксаторы в некоторых пространствах фигур [2].

2. Пусть $M = P_N$ $(N>1)$. При соответствующем выборе репера уравнения преобразования, определяемого элементом g подгруппы стационарности $S(\ell)_0$, точки $P^0 = \ell(0)$ имеют в неоднородных координатах следующий вид:

$$y^i = a^i_j x^j \quad (1 - p_k x^k), \quad (\det(a^i_j) \neq 0) \tag{1}$$

Обозначив символом $\langle k \rangle$ сумму членов порядка малости $p \geqslant k$ относительно $t \in R$ и записав разложения отображений ε и ℓ в ряды Тейлора

$$\varepsilon(t) = bt + \tfrac{1}{2}ct^2 + \langle 3 \rangle, \quad x^i = \ell^i t + \tfrac{1}{2} m^i t^2 + \langle 3 \rangle, \tag{2}$$

для кривых $\ell \circ \varepsilon$ и $g \circ \ell$ получаем соответственно

$$y^i = b\ell^i t + \tfrac{1}{2}(b^2 m^i + c\ell^i)t^2 + \langle 3 \rangle, \tag{3}$$

$$y^i = a^i_j \ell^j t + \tfrac{1}{2}(a^i_j m^j + 2a^i_j p_k \ell^j \ell^k)t^2 + \langle 3 \rangle. \tag{4}$$

Условие $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$ означает:

$$a^i_j \ell^j = b\ell^i, \quad a^i_j m^j + 2a^i_j p_k \ell^j \ell^k = b^2 m^i + c\ell^i \tag{5}$$

П р е д л о ж е н и е 2. Для P_N $(N>1)$ следующие 3 утверждения эквивалентны: I/ 2-скорость $(\ell)_2$ является 2-фиксатором; 2/ $(\ell)_2$ является 2-квазификсатором; 3/ $(\ell)_2$ - состоит из кривых, имеющих в $\ell(0)$ инфлексионную точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 3/ $\Rightarrow$ 1/. Пусть ℓ имеет в $\ell(0)$ инфлексионную точку. Тогда

$$m^i = \sigma \ell^i. \tag{6}$$

Условие $g \in S\{\ell\}_1$ означает: $a^i_j \ell^j = a\ell^i$, поэтому 2-е равенство из (5) сводится к соотношению

$$\sigma a + 2ap_k \ell^k = b^2 \sigma + c. \tag{7}$$

Положив $b = a$, $c = \sigma(a - b^2) + 2ap_k\ell^k$, получим такое ε, что $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$, откуда $g \in S\{\ell\}_2$. 2/ $\Rightarrow$ 3/. Условие $g \in S(\ell)_1$ означает: $a^i_j \ell^j = \ell^i$, при этом условие $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$ сводится к соотношениям:

$$b = 1, \quad a^i_j m^j = (c - 2p_k \ell^k)\ell^i + m^i. \qquad (8)$$

Предположим $m^i \neq \sigma \ell^i$. Тогда существуют такие a^i_j, что система (8) не удовлетворяется ни при каком c (например, в случае, когда матрица (a^i_j) имеет m^i своим собственным вектором с не равным 1 собственным значением). Наконец 1/ $\Rightarrow$ 2/ вытекает из предложения 1.

3. Пусть M является пространством $R(p,\pi)$ неинцидентных нуль-пар (p,π) проективного пространства P_n. В репере нулевого порядка уравнения преобразования, определяемого элементом g из подгруппы стационарности $S(\ell)_0$, пары $(p^0, \pi^0) = \ell(0)$ имеют вид

$$y^i = A^i_j x^j, \quad \eta_i = B^j_i \xi_j, \quad (B^j_i A^j_k = \delta^i_k), \qquad (9)$$

где y^i, x^i -неоднородные координаты точек p, ξ_i, η_i - неоднородные тангенциальные координаты гиперплоскостей π. Для кривой ℓ имеем:

$$x^i = \ell^i t + \tfrac{1}{2} m^i t^2 + \langle 3 \rangle, \quad \xi_i = \lambda_i t + \tfrac{1}{2}\mu_i t^2 + \langle 3 \rangle. \qquad (10)$$

Условия $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$ принимают вид

$$\begin{cases} A^i_j \ell^j = b\ell^i, \quad B^j_i \lambda_j = b\lambda_i, & (11) \\ A^i_j m^j = c\ell^i + b^2 m^i, \quad B^j_i \mu_j = c\lambda_i + b^2\mu_i & (12) \end{cases}$$

П р е д л о ж е н и е 3. В $R(p,\pi)$ 2-скорость является 2-фиксатором в том и только в том случае, если она состоит из инфлексионных в элементе $\ell(0)$ кривых (см. [3, с.10]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $g \in S\{\ell\}_1$ получаем $A^i_j \ell^j = a\ell^i$, $B^j_i \lambda_j = a\lambda_i$ Из (II) при этом вытекает $b = a$. Пусть ℓ инфлексионна в $\ell(0)$:

$$m^i = \sigma \ell^i, \quad \mu_i = \sigma \lambda_i. \qquad (13)$$

(см. [3, с.10]). (12) принимают вид: $c + \sigma a^2 = \sigma a$. Итак, взяв $b = a$, $c = \sigma(a - a^2)$, получим ε, для которого $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$, т.е. $g \in S\{\ell\}_2$. Пусть (13) не выполняется. Возьмем в качестве (A^i_j) матрицу, имеющую m^i собственным вектором с не равным b^2 собственным значением; тогда (I2) не выполняется ни при каких c.

П р е д л о ж е н и е 4. В $R(p,\pi)$ 2-скорость является 2-квазификсатором в том и только в том случае, если она состоит из слабо инфлексионных в $\ell(0)$ кривых [3, с.10].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $g \in S(\ell)_1$ означает: $A^i_j \ell^j = \ell^i$, $B^j_i \lambda_j = \lambda_i$. Пусть ℓ слабо инфлексионна в $\ell(0)$: $m^i = \sigma_1 \ell^i$, $\mu_i = \sigma_2 \lambda_i$. Положив $b = 1$, $c = 0$, получим ε, для которого $\ell \circ \varepsilon \in (g \circ \ell)_2$. Вторая часть предложения доказывается так же, как 2) $\Longrightarrow$ 3) в предложении 2.

Из последних двух предложений вытекает

С л е д с т в и е I. Для $R(p,\pi)$ понятие 2-квазификсатора является W -инвариантным [3, с.9], а понятие 2-фиксатора этим свойством не обладает.

В статье [3] доказано геометрическое свойство 2-фиксаторов, выделяющее их из множества 2-квазификсаторов в $R(p,\pi)$ (теорема 2.1).

Одна геометрическая характеристика 2-фиксаторов и 2-квазификсаторов в $R(p,\pi)$ связана с существованием в нем инвариантной невырожденной метрики [4], которая определяет в $R(p,\pi)$ структуру псевдориманова пространства. Известно, что в псевдоримановом пространстве существует единственная аффинная связность без кручения, сохраняющая скалярные произведения при параллельном переносе. Обозначим ее символом ∇. Имеют место следующие два предложения.

П р е д л о ж е н и е 5. 2-скорость $(\ell)_2$ в $R(p,\pi)$ является 2-фиксатором в том и только в том случае, если она содержит геодезическую связности ∇.

П р е д л о ж е н и е 6. 2-скорость $(\ell)_2$ в $R(p,\pi)$ является 2-квазификсатором в том и только в том случае, если она содержит кривую, W-эквивалентную геодезической связности ∇.

4. Можно показать, что для пространств E_n $(n>2)$ и A_n $(n>1)$ справедливы утверждения, аналогичные предложению 2. Для пространства пар точек аффинного пространства A_n $(n>2)$ в общем случае имеют место аналоги предложений 3 и 4.

5. Применим понятия 2-фиксатора и 2-квазификсатора к изучению дифференцируемого отображения $\varphi: P_N \to R(p,\pi)$ [3, с.II]. Из предложений 2,3,4 и теоремы 3.I работы [3] вытекает

П р е д л о ж е н и е 7. Чтобы вектор $(\ell)_1$ определял в $\ell(0)$ характеристическое (слабо характеристическое) направление отображения φ, необходимо и достаточно, чтобы 2-фиксатору $(\ell)_2 \subset (\ell)_1$ пространства P_N при отображении φ соответствовал 2-фиксатор (2-квазификсатор) $(\varphi\circ\ell)_2$ пространства $R(p,\pi)$.

Список литературы

I. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. - В кн.: Проблемы геометрии. Т.9. М., 1979, с.5-246.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. - Тр. геом. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1969, с.179-206.

3. А н д р е е в Б.А. Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. Калининград, 1981, с.8-12.

4. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Проективная геометрия как метрическая геометрия. Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, вып.8, с.328-354.

5. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. - Геометрия. 1963. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР, 1965, с.65-107.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Е.В. Бухарина, Е.В. Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрен частный класс вырожденных конгруэнций $(Q_p)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q, описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью p, описывающей двупараметрическое семейство (конгруэнцию). Каждой плоскости p конгруэнции $(Q_p)_{1,2}$ ставится в соответствие единственная квадрика Q, полным прообразом которой является однопараметрическое семейство плоскостей p. Исследованы проективно-дифференциальные свойства некоторых геометрических образов, ассоциированных с выделенным классом конгруэнции $(Q_p)_{1,2}$.

Пусть C - линия пересечения плоскости p с соответствующей ей квадрикой Q. Проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором A_3 совмещена с характеристической точкой плоскости p, A_1 и A_2 расположены в точках пересечения коники C с полярой точки A_3 относительно этой коники, A_4 совпадает с полюсом плоскости p относительно квадрики Q. Уравнения квадрики Q и коники C относительно построенного репера с учетом соответствующей нормировки его вершин примут соответственно вид

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0;$$

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0.$$

Дальнейшую нормировку вершин репера осуществим так,